зами, в особенности над одной из них, содержащейся в пятом постулате. Чтобы понять сущность этих умозрений, лучше всего, может быть, вспомнить, что постулат этот в большинстве изданий „Начал" нашел место среди аксиом, где в итоге вставок других менее подлинных аксиом он получил название „одиннадцатой аксиомы Эвклида". Пока среди постулатов находилась характеристика (détermination) точки, как места пересечения двух прямых, это являлось естественным дополнением к характеристике прямой по двум точкам; наоборот, когда та же гипотеза была включена среди соответствующих теоремам аксиом, то это должно было привлечь особенное внимание к содержащемуся здесь ограничению. Аксиома, согласно которой две прямые, у которых сумма внутренних и расположенных по одну и ту же сторону углов, образуемых третьей, пересекающей их прямой, меньше двух прямых, пересекаются между собой с этой стороны, становилась тогда дополнением к теореме, согласно которой две прямые параллельны, когда названная сумма равна двум прямым. Эвклид доказывает эту последнюю теорему в I, 27 и 16 с помощью других гипотез. Нельзя ли в таком случае доказать также одиннадцатую аксиому и вытекающую из нее важную теорему о сумме углов треугольников?

Вопрос этот породил с течением времени несчетное множество попыток доказательств. Некоторые из них были, без сомнения, до известной степени правомерны, поскольку они ставили на место эвклидовой гипотезы другие гипотезы, истинность которых можно было с самого начала признать с тем же основанием, как истинность гипотезы Эвклида. Но авторы их, в отличие от Эвклида, не всегда сознавали и говорили, что они выдвигают просто гипотезы. Мы приведем ниже для упоминаемой здесь аксиомы Эвклида и для связанных с ней теорем о том, что прямая линия однозначно определена (déterminée), когда она проходит через какую-нибудь точку и параллельна данной прямой или что „сумма углов треугольника равна двум прямым",—ряд доказательств, которые вошли в употребляемые в наше время или в употреблявшиеся в непосредственно предшествующую эпоху руководства. Среди этих доказательств те, которые отмечены нами № 2 и 3, принадлежат французскому математику Лежандру (Legendre).

1. Довольствуются тем, что стараются показать самоочевидность аксиомы и убедить читателя принять ее на тех же основаниях, на каких он принимает предшествующие геометрические гипотезы.

2. Теорему, что „два угла треугольника определяют третий угол его", можно свести к определению треугольника по одной стороне и двум прилежащим к ней углам. Действительно, величина одной единственной стороны может дать лишь масштаб начерченной фигуры и, следовательно, не может иметь никакого влияния на форму треугольника, а значит, и на углы, значит, два заданных угла треугольника определяют третий угол его. Нетрудно видеть, что при доказательстве здесь пользуются, в качестве геометрической гипотезы, идеей подобия или идеей независимости вида фигуры от масштаба: это в точности соответствует методу самого Эвклида, когда в своей аксиоме перемещения он устанавливает в качестве геометрического принципа величин идею конгруэнтности.

3. Другие исследователи не довольствуются, подобно Эвклиду, для определения (détermination) величины угла принципом перемещения, а рассматривают величину угла, как отношение бесконечной части плоскости, заключенной между сторонами угла, ко всей плоскости в целом. Поэтому, если бы можно было провести через точку две прямые, параллельные данной прямой, то вся полуплоскость, отсекаемая этой последней прямой, полуплоскость, равная двум прямым углам, составляла бы только часть одного из четырех углов, которые образуют обе первые прямые и которые каждый меньше двух прямых углов. Нетрудно видеть здесь, что новая гипотеза заключается в специфический дефиниции угла и сводится к утверждению, будто устанавливаемое в этой дефиниции отношение двух бесконечных количеств имеет определенное значение.

4. Другие исследователи доказывают, что сумма внешних углов многоугольника равна четырем прямым; для этого доказательства они вращают прямую последовательно вокруг вершин углов многоугольника, начиная с одной из сторон, пока она не совпадет с другой стороной; когда эта прямая вернется к своему первоначальному положению, то она, в общем, должна повернуться настолько, на сколько она повернулась бы при возвращении к первоначальному положению, вращаясь вокруг неподвижной точки. В этом доказательстве при определении